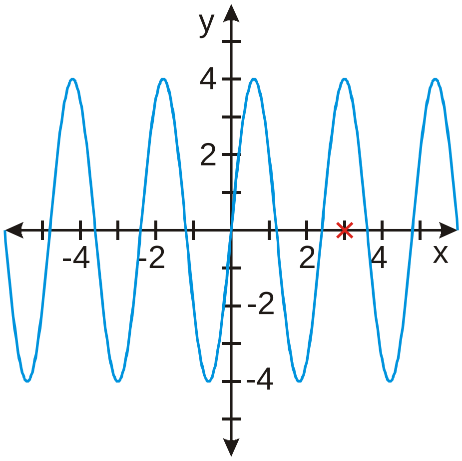
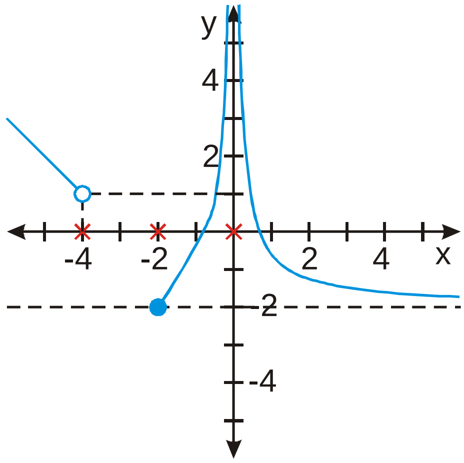
10.1.4 Spojitost funkce, limity funkce II

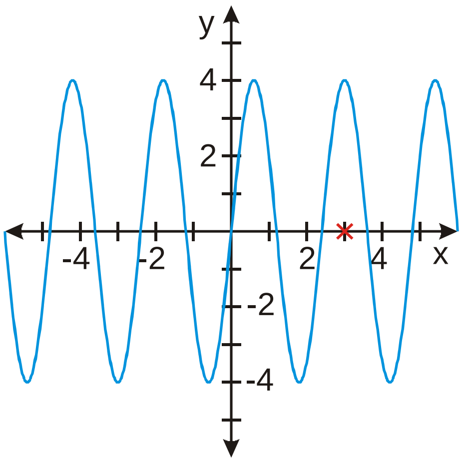
Předpoklady: 10103

Pedagogická poznámka: Po prvním příkladu, který společně kontrolujeme, abychom se ujistili, že si všichni pamatují látku z minulé hodiny, pracují ostatní samostatně. Všichni by měli stihnout příklad 2, ti nejlepší si pak mohou lámat hlavu s příklady 4 a 5.

Př. 1: U následujících funkcí urči limity v nevlastních bodech a limity ve vyznačených vlastních bodech. Pokud v nějakém z vyznačených bodů limita neexistuje, urči (pokud existují) jednostranné limity.

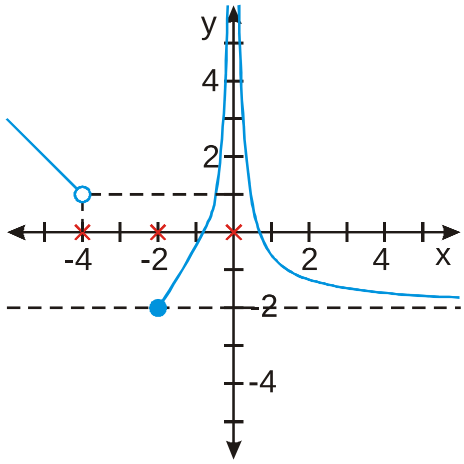






$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 4$

funkce je spojitá, limity v nevlastních bodech nemá



$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -2$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \to -4^-} f(x) = 1$ $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -2$

Funkce není spojitá v bodech z intervalu $\langle -4; -2 \rangle$ a v bodě 0.

V bodě –2 je funkce spojitá zprava.

Př. 2: V každém části příkladu nakresli graf funkce, která splňuje zadané podmínky. Jaká další řešení by daný podpříklad mohl mít? Co tato řešení musí splňovat?

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ neexistuje

b) funkce není v bodě $x = 2$ spojitá, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$

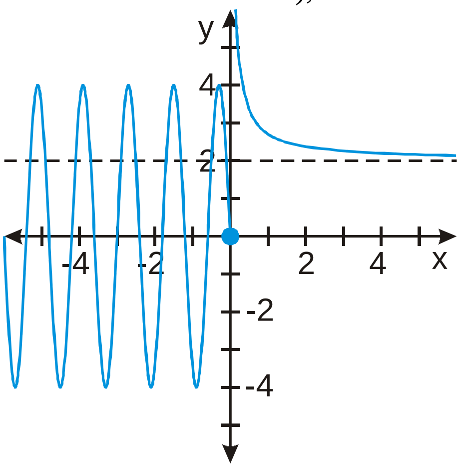
c) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 3$, funkce není v bodě $x = 2$ spojitá zleva, $\{2\} \in D(f)$

d) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 3$, funkce je v bodě $x = 2$ spojitá zleva

e) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \infty$, funkce je v bodě $x = 2$ spojitá

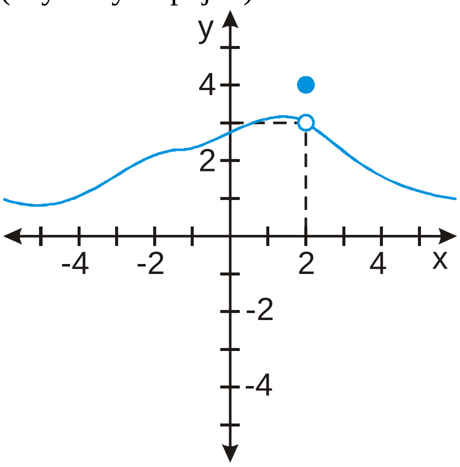
a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ neexistuje

na pravé straně grafu se jeho body musí přibližovat vodorovné čáře jdoucí bodem 2 (je jedno zda seshora nebo zdola), na levé straně musí graf oscilovat jako sinus



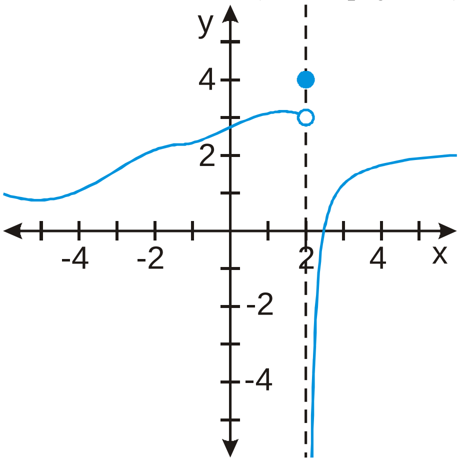
b) funkce není v bodě $x = 2$ spojitá, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$

funkce se musí jakkoli z obou stran blížit k bodu $[2;3]$, ale nesmí mít v tomto bodu hodnotu (aby nebyla spojitá)



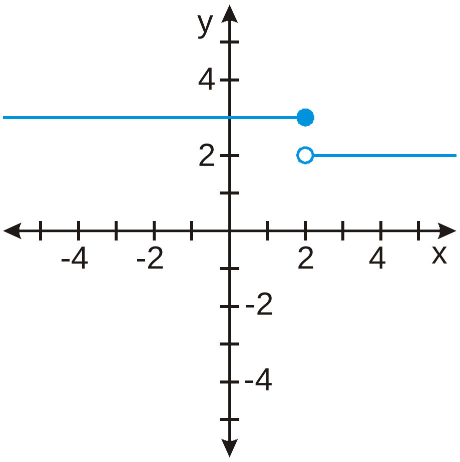
c) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 3$, funkce není v bodě $x = 2$ spojitá zleva, $\{2\} \in D(f)$

zprava musí funkce před $x = 2$ padat dolů, zleva musí směřovat k bodu $[2;3]$, ale nesmí v něm mít hodnotu (kvůli spojitosti)



d) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 3$, funkce je v bodě $x = 2$ spojitá zleva

musí platit $f(2) = 3$, aby se funkce zleva blížila ke své hodnotě a byla tak zleva spojitá

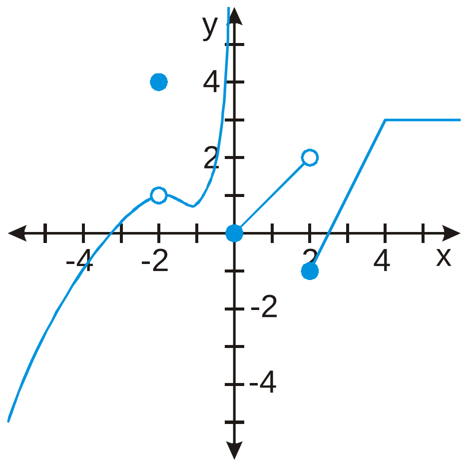


e) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \infty$, funkce je v bodě $x = 2$ spojitá

není možné vyřešit, funkce by v bodě $x = 2$ musela mít hodnotu ∞, ale tu mít nemůže, k té se může jenom blížit

Př. 3: Nakresli graf libovolné funkce, která splňuje „všechny“ uvedené podmínky (Dvě z uvedených podmínek jsou v rozporu. Najdi tuto dvojici a jednu z těchto podmínek při kreslení vynechej.):
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-2} f(x) = 1$, funkce v bodě –2 není spojitá,
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -1$, funkce je v bodě 2 spojitá zprava, $f(2) = 1$.

V rozporu jsou poslední dva požadavky. Pokud má být funkce spojitá zprava, musí se její hodnota rovnat limitě zprava, která je –1 $\Rightarrow$ vynecháme poslední požadavek $f(2) = 1$.



Př. 4: Rozhodni, zda může existovat funkce, která v některém ze svých vlastních bodů nebude mít ani jednostranné limity a přitom není definována maximálně v jednom bodě.

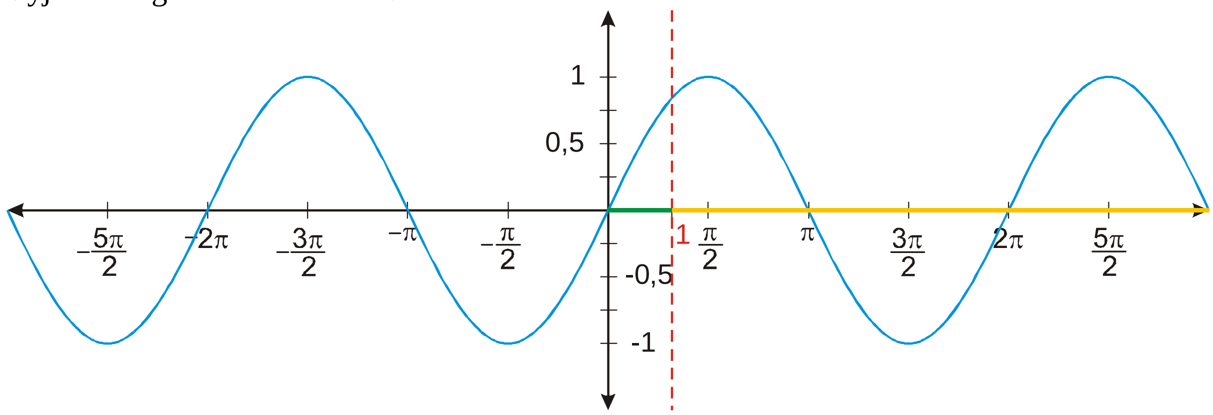
Sestrojit takovou funkci není jednoduché, ale je to možné. Musíme zajistit, aby se na libovolně malém úseku před daným bodem střídali hodnoty ve stále stejném rozsahu. Splňují to například takového funkce:

- každému racionálnímu číslo přiřadíme 1 a každému iracionálnímu číslu 0
- každému racionálnímu číslo přiřadíme jeho jmenovatele a každému iracionálnímu číslu 0

Další možností je pak funkce z následujícího příkladu

Př. 5: Načrtni graf funkce $y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

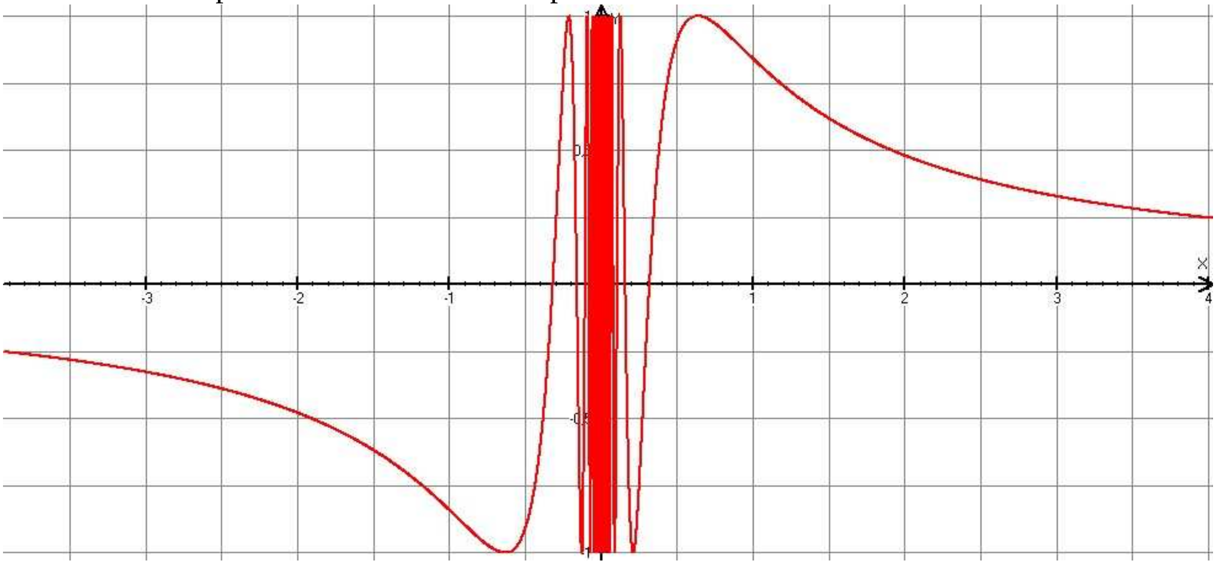
Vyjdeme z grafu funkce sinus:



Na grafu je vyznačeno umístění bodu $x = 1$ na ose *x*. Tento bod se nezmění, když $y = \sin x$ zaměníme za funkci $y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, protože převrácená hodnota z jedné je opět jedna.

Vnitřní funkce $\frac{1}{x}$, převede čísla z intervalu $(0;1)$ na interval $(1;\infty)$ $\Rightarrow$ nad žlutou částí osy *x* bude jenom malá část sinusovky, která je nyní nad zelenou částí.

Vnitřní funkce $\frac{1}{x}$, převede čísla z intervalu $(1;\infty)$ na interval $(0;1)$ $\Rightarrow$ nad zelenou částí osy x bude velká část sinusovky, která je nad žlutou částí osy x, tedy nekonečně mnoho čím dál více stlačených vlnovek $\Rightarrow$ funkce nebude mít zprava limitu v nule..
Graf si můžeme prohlédnout na obrázku z počítače:



Shrnutí: